



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

POLIEDROS

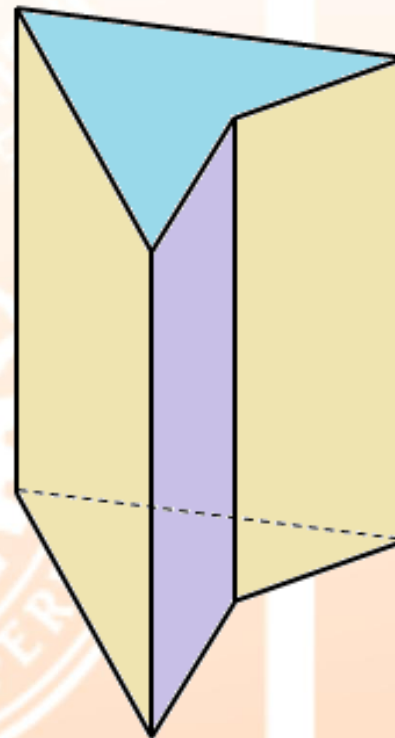
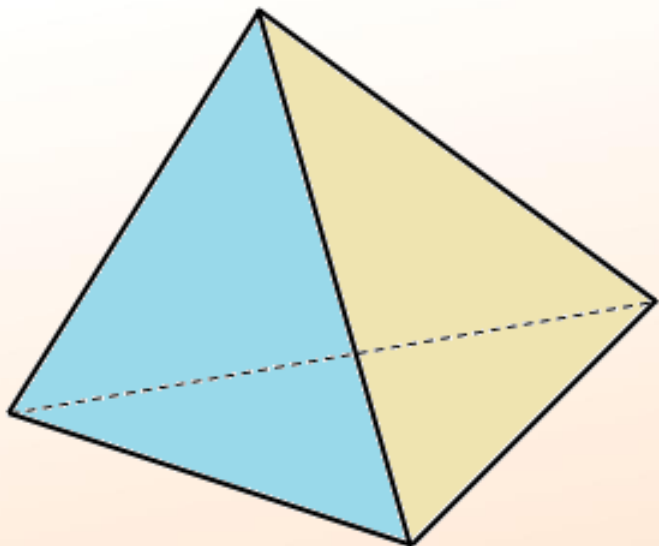
**CICLO
PRE
2024-1**



POLIEDRO

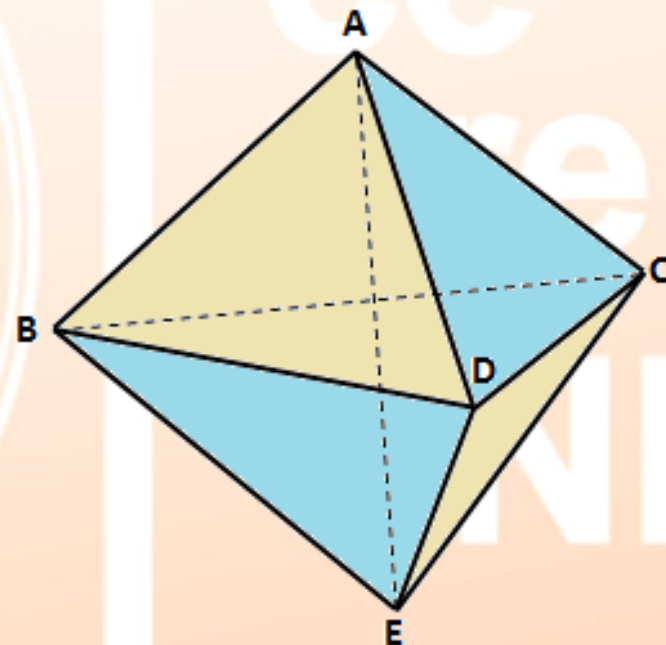
Definición:

Un poliedro es la unión de cuatro o más regiones poligonales no coplanares, de modo que dos regiones adyacentes tienen solamente una arista común.



Elementos del poliedro

- **Caras:** Son las regiones poligonales que forman el poliedro (ABC, ADC, ABD, BED, EDC y BEC)
- **Aristas:** Son los lados de las caras ($\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{EB}$, $\dots$, $\overline{BC}$)
- **Vértices:** Son los vértices de las caras (A, B, C, D y E)
- **Diagonales:** Son los segmentos cuyos extremos son dos vértices que no pertenecen a la misma cara ($\overline{AE}$)
- **Ángulos diedros:** Son los determinados por dos caras adyacentes (A-BD-E, A-CD-E, etc.)
- **Ángulos poliedros:** Son aquellos cuyo vértice coincide con uno de los vértices del poliedro y sus caras contienen a las caras del poliedro (A-BCD, D-ABCE, etc.)



Clasificación de los poliedros

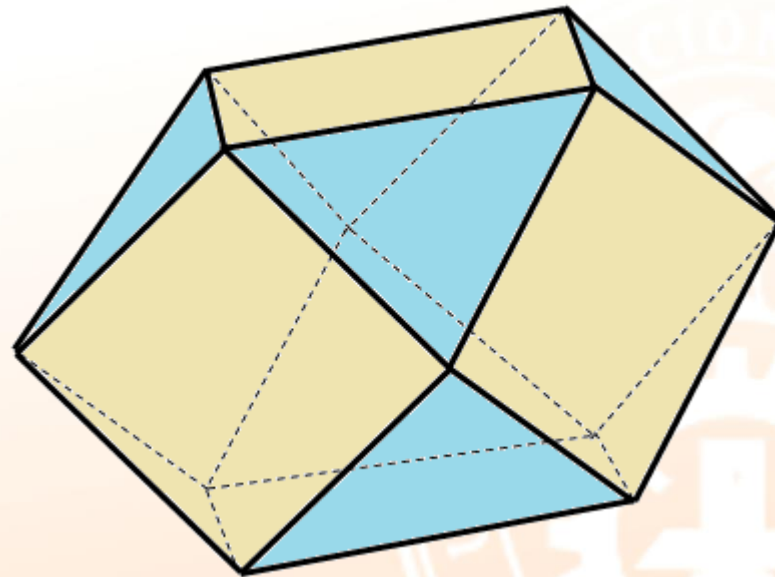
Según el número de caras

Poliedro	Número de caras
Tetraedro	4
Pentaedro	5
Hexaedro	6
Heptaedro	7
Octaedro	8
Nonaedro	9
Decaedro	10
Endecaedro	11
Dodecaedro	12
Pentadecaedro	15
Icosaedro	20

POLIEDRO CONVEXO

Definición:

Un poliedro se denomina convexo, cuando su interior es un conjunto convexo.

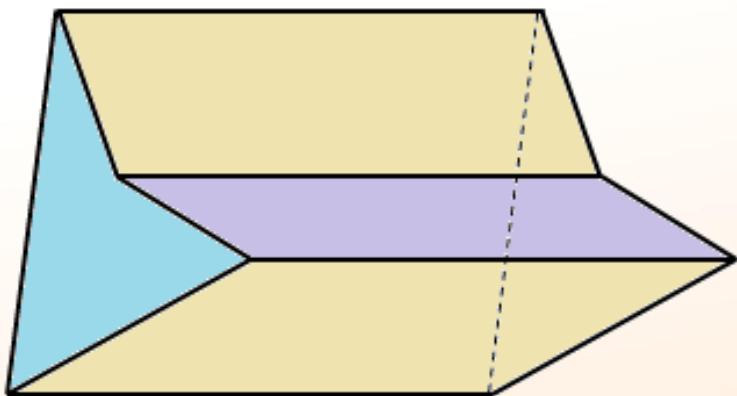


Poliedro convexo de 14 caras

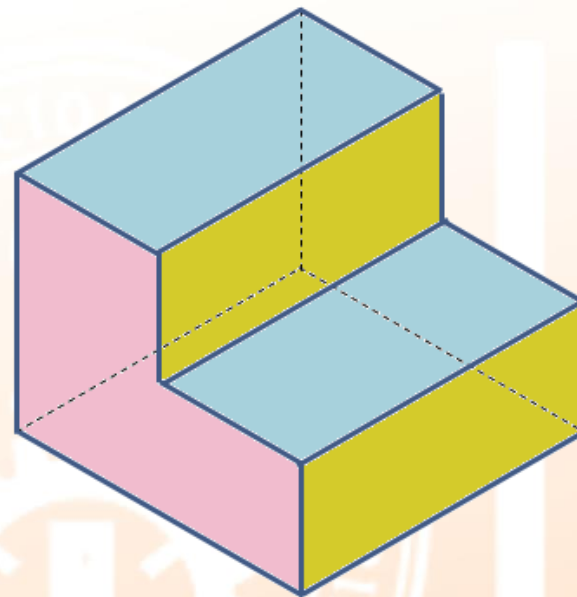
POLIEDRO NO CONVEXO

Definición:

Un poliedro se denomina no convexo, cuando su interior es un conjunto no convexo.



Hexaedro no convexo



Octaedro no convexo

EJERCICIO 01

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Existe algún poliedro con una diagonal.
- II. Existen poliedros con dos diagonales.
- III. Si las caras de un poliedro son regiones convexas, entonces el poliedro es convexo.

A) VVV
D) FFV

B) VVF
E) FFF

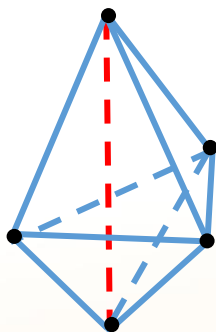
C) FVF

RESOLUCIÓN 01

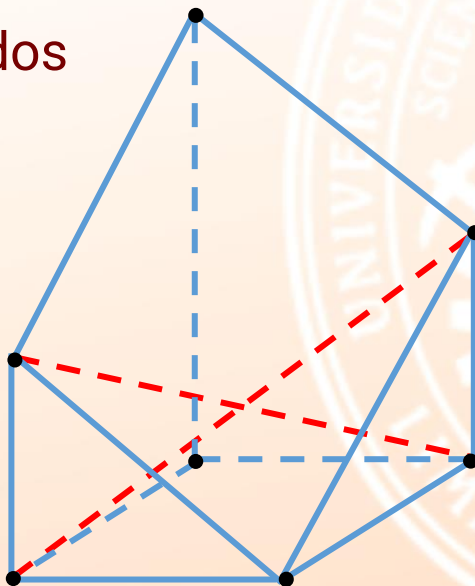
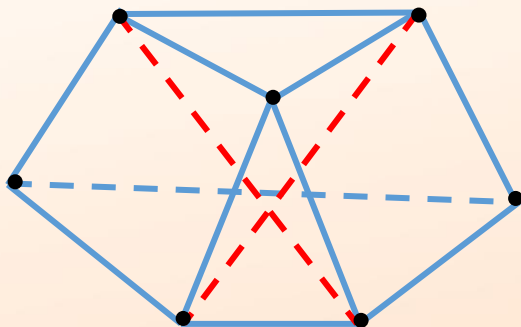
Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Existe algún poliedro con una diagonal.
- II. Existen poliedros con dos diagonales.
- III. Si las caras de un poliedro son regiones convexas, entonces el poliedro es convexo.

I. (V)

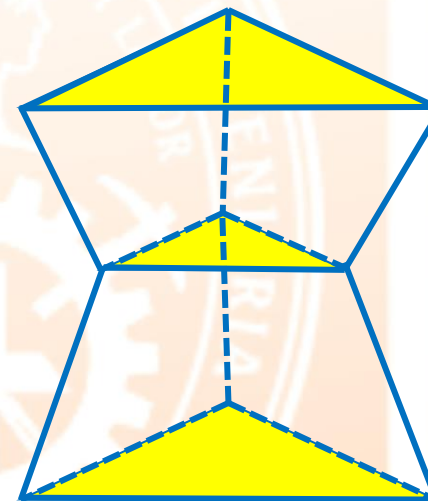


II. Existen poliedros con dos diagonales (V)



III. Si las caras de un poliedro son regiones convexas, el poliedro puede ser no convexo.

(V)

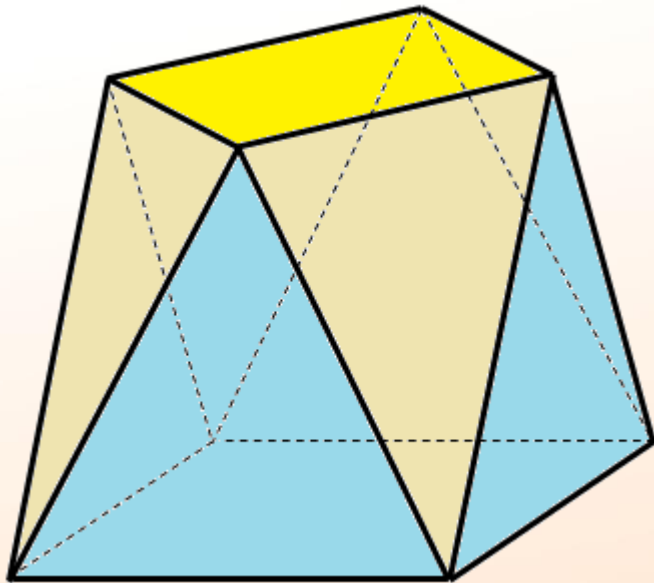


Clave: A

TEOREMAS DE LOS POLIEDROS CONVEXOS

Teorema 1

Todas las caras de un poliedro convexo son regiones poligonales convexas.

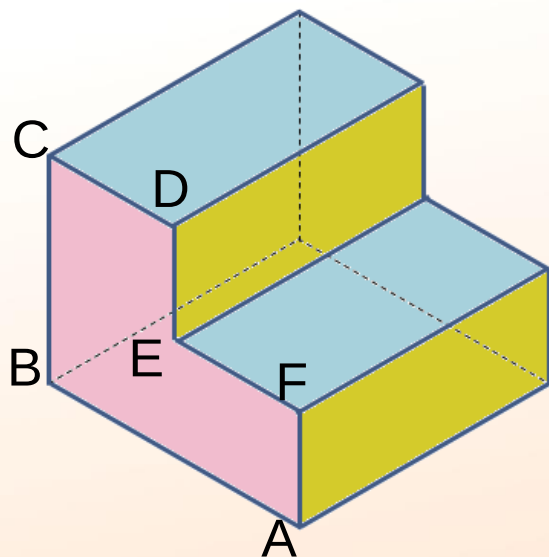


En el poliedro convexo se observa que todas las caras son regiones poligonales convexas.

Demostración:

Supongamos que un poliedro convexo tiene una cara no convexa, entonces el poliedro es no convexo.

Por lo tanto, ninguna de las caras del poliedro convexo deben ser no convexas

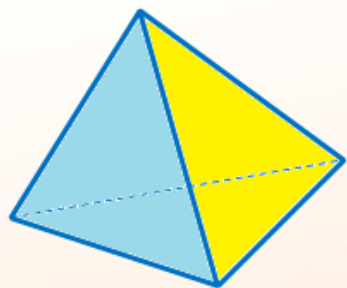


Si la cara ABCDEF es no convexa, entonces el poliedro es no convexo.

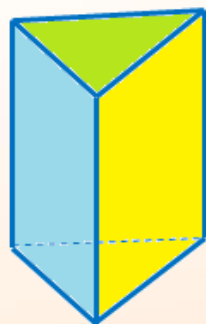
Teorema 2

En todo poliedro convexo, la suma de los números de vértices y caras es igual al número de aristas más dos.

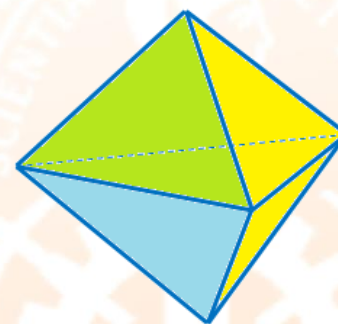
Si V = número de vértices, C = número de caras y A = número de aristas, entonces $V + C = A + 2$ (**Teorema de Euler**)



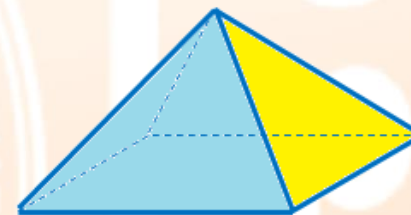
$$\begin{aligned} V &= 4 \\ C &= 4 \\ A &= 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= 6 \\ C &= 5 \\ A &= 9 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= 5 \\ C &= 6 \\ A &= 9 \end{aligned}$$



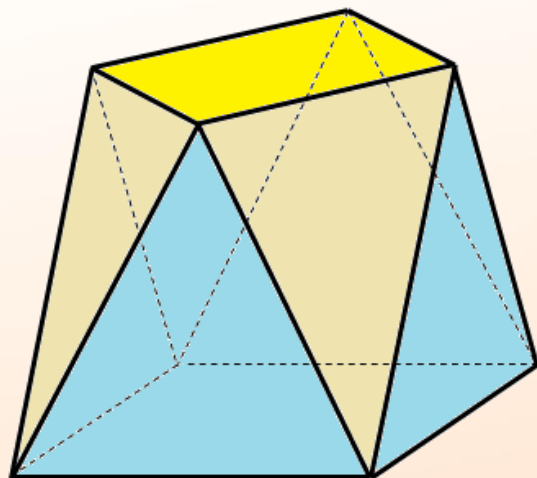
$$\begin{aligned} V &= 6 \\ C &= 6 \\ A &= 10 \end{aligned}$$

Teorema 3

En un poliedro convexo, la suma de los números de aristas de todas las caras es igual al doble del numero de aristas del poliedro

Sea el poliedro que tiene C caras y A aristas. Si $n_1, n_2, n_3, \dots, n_C$ son los números de aristas de cada una de las caras, entonces $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_C = 2A$

Ejemplo:



- Número de aristas de las caras triangulares
 $8 \times 3 = 24$ aristas
- Número de aristas de las caras cuadrangulares
 $4 \times 2 = 8$ aristas

Luego

$$2A = 24 + 8 \rightarrow A = 16$$

Teorema 4

En un poliedro convexo, la suma de las medidas de los ángulos internos de todas las caras es: $S = 360(V - 2) = 360(A - C)$

Demostración:

Si $n_1, n_2, n_3, \dots, n_C$ son los números de lados de cada una de las caras de un poliedro convexo, entonces la suma de las medidas de los ángulos internos de todas las caras es

$$S = 180(n_1 - 2) + 180(n_2 - 2) + 180(n_3 - 2) + \dots + 180(n_C - 2)$$

$$S = 180(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_C - 2 - 2 - \dots - 2)$$

$$S = 180(2A - 2C) = 360(A - C)$$

EJERCICIO 02

Un poliedro convexo tiene 12 caras triangulares, 16 caras cuadrangulares, 24 caras pentagonales y 13 caras hexagonales. Calcule el número de vértices del poliedro.

A) 76
D) 86

B) 80
E) 90

C) 84

RESOLUCIÓN 02

Un poliedro convexo tiene 12 caras triangulares, 16 caras cuadrangulares, 24 caras pentagonales y 13 caras hexagonales. Calcule el número de vértices del poliedro.

V : número de vértices

$S_{\angle \text{caras}}$: suma de medidas de los ángulos internos de todas las caras.

$$S_{\angle \text{caras}} = 360(V - 2)$$

El poliedro tiene 12 caras triangulares, 16 caras cuadrangulares, 24 caras pentagonales y 13 caras hexagonales

$$S_{\angle \text{caras}} = 12(180) + 16(360) + 24(540) + 13(720) = 360(V - 2)$$

$$V = 86$$

Clave: D

EJERCICIO 03

En un poliedro convexo, el número de caras es igual al número de vértices, y la suma de los números de caras, vértices y aristas es 34. Indique el nombre del poliedro.

A) Octaedro

B) Nonaedro

C) Decaedro

D) Dodecaedro

E) Icosaedro

RESOLUCIÓN 03

En un poliedro convexo, el número de caras es igual al número de vértices, y la suma de los números de caras, vértices y aristas es 34. Indique el nombre del poliedro.

C: número de caras del poliedro

$$C = V \dots \dots \dots (I)$$

$$C + V + A = 34 \dots \dots \dots (II)$$

$$\text{Teorema de Euler } C + V = A + 2 \dots \dots \dots (III)$$

(III) y (I) en (II)

$$C + C + 2C - 2 = 34$$

$C = 9$, el poliedro es un nonaedro

Clave: B

Teorema 5

En un poliedro convexo, se cumple que el número total de diagonales es

$$D = \binom{V}{2} - A - \# \text{ diagonales de todas las caras}$$

Siendo V y A los números de vértices y aristas del poliedro.

EJERCICIO 04

Un poliedro de 26 diagonales, está formado solo por regiones cuadrangulares. ¿Cuál es el número de caras del poliedro?

A) 8

D) 11

B) 9

E) 12

C) 10

RESOLUCIÓN 04

Un poliedro de 26 diagonales, está formado solo por regiones cuadrangulares. ¿Cuál es el número de caras del poliedro?

Calcule el número de caras C

Dato: Nro. de diagonales $_{\text{poliedro}} = 26$

$$\text{Teorema: } A = \frac{C(4)}{2} = 2C$$

$$\text{Nro. de diagonales }_{c/\text{cara}} = 2C$$

$$\text{Teorema de Euler: } C + V = A + 2 \rightarrow V = C + 2$$

$$\text{Nro. de diagonales }_{\text{poliedro}} = \frac{V(V-1)}{2} - A - \text{Nro. de diagonales }_{c/\text{cara}}$$

$$26 = \frac{(C+2)(C+1)}{2} - 2C - 2C$$

$$C^2 - 5C - 50 = 0 \Rightarrow C = 10$$

Clave: C

EJERCICIO 05

Un poliedro convexo está formado por tres regiones hexagonales y n regiones pentagonales. Si el número de vértices es 20, entonces el valor de n es

A) 6

B) 7

C) 8

D) 10

E) 12

RESOLUCIÓN 05

Un poliedro convexo está formado por tres regiones hexagonales y n regiones pentagonales. Si el número de vértices es 20, entonces el valor de n es

Datos: $C = 3 + n$, $V = 20$, Calcule: n

Teorema: N° total de lados de las caras = $2A$

Teorema: $3(6) + n(5) = 2A$

Teorema de Euler: $3 + n + 20 = A + 2$

Resolviendo: $n = 8$, $A = 29$, $C = 11$

Clave: C

EJERCICIO 06

¿Cuántos poliedros regulares cuyas caras son regiones triangulares existen?

A) 2

D) 5

B) 3

E) 1

C) 4

RESOLUCIÓN 06

¿Cuántos poliedros regulares cuyas caras son regiones triangulares existen?

Si: n = Nro. de lados de cada cara, m = Nro. de aristas en cada vértice

Teorema: $n C = m V = 2A \rightarrow A = \frac{n C}{2} \text{ y } V = \frac{n C}{m}$

Reemplazando en el teorema de Euler: $C + V = A + 2 \quad C - \frac{n C}{m} = \frac{n C}{2} + 2$

Si: $n = 3$

$$C = \frac{4 m}{6 - m}, \quad 3 \leq m < 6$$

$$m = 3 \rightarrow C = 4$$

$$m = 4 \rightarrow C = 8$$

$$m = 5 \rightarrow C = 20$$

Clave: B

EJERCICIO 07

Un poliedro convexo, está limitado por $3k$ regiones triangulares, $3k$ regiones cuadrangulares y $5k$ regiones pentagonales, siendo k un entero positivo. Si la suma de las medidas de los ángulos de todas las caras es 4320, entonces el número de caras del poliedro es

A) 11

B) 22

C) 33

D) 44

E) 66

RESOLUCIÓN 07

Un poliedro convexo, está limitado por $3k$ regiones triangulares, $3k$ regiones cuadrangulares y $5k$ regiones pentagonales, siendo k un entero positivo. Si la suma de las medidas de los ángulos de todas las caras es 4320, entonces el número de caras del poliedro es

Teorema: $\sum \angle i(\text{caras}) = 360(A - C) = 4320 \dots (1)$

dato: $A = 3k \cdot 3 + 3k \cdot 4 + 5k \cdot 5 \quad \rightarrow \quad A = 23k$

dato: $C = 3k + 3k + 5k = 11k$

Reemplazando en (1): $360(23k - 11k) = 4320 \quad \rightarrow \quad k = 1$

Teorema de Euler: $C + V = A + 2 \quad \rightarrow \quad 11k + V = 23k + 2$

$\rightarrow \quad C = 11 \quad V = 14 \quad A = 23$

Clave: A